

THÈSE

Présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

en vue

DU DIPLOME DE DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ (3^e Cycle) DE PHYSIQUE
(Physique Nucléaire)

par

Joseph GOLDBERG

Sujet :

Sur l'utilisation des métriques indéfinies pour la détermination des
propagateurs en théorie quantique des champs.

soutenue le 23 Juin 1965 devant la Commission d'examen

JURY

MM.

BRACONNIER
MAURY
PHILBERT

Président

Examineurs

THÈSE

Présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

en vue

DU DIPLOME DE DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ (3^e Cycle) DE PHYSIQUE
(Physique Nucléaire)

par

Joseph GOLDBERG

Sujet :

Sur l'utilisation des métriques indéfinies pour la détermination des
propagateurs en théorie quantique des champs.

soutenue le 23 Juin 1965 devant la Commission d'examen

JURY

MM. BRACONNIER
MAURY
PHILBERT

Président
Examineurs



U N I V E R S I T E D E L Y O N

FACULTE DES SCIENCES

Doyens Honoraires

MM. LONGCHAMBON
MOUSSA
GAUTHIER Henri

Professeurs Honoraires

MM. LOCQUIN
de LARAMBERGUE
SOLLAUD
MENTZER
MOUSSA
JAFFARD
EYRAUD Henri
DEJARDIN
VIRET

Doyen

M. BRACONNIER

Assesseurs

MM. MESNARD
BOIDIN



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553409_0050

Professeurs

MM. LONGCHAMBON

PRETTRE

COURTY

KUHNER

MALECOT

PARIS

AUMERAS

COLONGE

JANIN

FLANDRIN

BERNARD

DUFAY Jean

NIGON

GAUTHIER Henri

WAUTIER

CHOPIN

CUEILLERON

BRACONNIER

EYRAUD Charles

SARAZIN

BOIDIN

PERES

MESNARD

GRANDMONTAGNE

BOUTILLIER

LAFOUCRIERE

DREUX

TEICHNER

PAVANS de CECCATTY

MERLIN

DUFAY Maurice

LUBET

PHILBERT

COHEN-ADDAD

DAVID Louis

CHANEL

MAURY

DEPRAZ

GAUTHIER Jean

GAUME

Minéralogie

Chimie industrielle

Chimie- Physique

Botanique

Mécanique rationnelle et appliquée

Chimie minérale

Chimie

Chimie organique

Physique générale

Géologie appliquée

Physique industrielle

Astronomie

Zoologie expérimentale

Géologie générale

Zoologie

Chimie biologique

Chimie

Calcul différentiel et intégral

Chimie-Physique appliquée

Physique nucléaire

Microbiologie et Mycologie

Physiologie

Electronique

Physique

Minéralogie

Physique nucléaire théorique

Chimie organique

Chimie industrielle

Zoologie

Chimie analytique

Physique de l'Atmosphère

Physiologie

Physique nucléaire

Chimie

Géologie générale

Psychophysiologie

Méthodes mathématiques de la Physique

Physique nucléaire

Chimie

Physique expérimentale

Professeurs sans Chaire

MM.	FERON	Mathématiques
	LAFORGUE	Physique
	LEGAY	Zoologie expérimentale S. P. C. N.
	UZAN	Physique S. P. C. N.
	CHENEVOY	Géologie appliquée
	GINET	Zoologie
	ASCH	Physique
	MICHEL Pierre	Minéralogie
	DUCET	Biologie végétale
Mle	MAITROT	Physique
MM.	GEVIN	Géologie générale
	PONASSE	Mathématiques
	d'INCAN	Physique
	LEFEBVRE	Mathématiques
	PERNET	Mathématiques
	CHERY	Physique
	BERGEON	Physique C. S. U.
Mle	GAUTHERON	Chimie biologique

Maîtres de Conférences

Mme	ERICSON	Physique générale
MM.	MARTEL	Mécanique
	MATHIEU	Mécanique des Fluides
	ERBEIA	Physique
	DESCOTES	Chimie organique
	PICARD Philippe	Mathématiques
	LEMOIGNE	Botanique
	DEMARCO	Géologie générale
	MICHEL Georges	Biochimie
	LEBRETON	Biologie végétale
	DAVID Jean	Biologie animale
	TOUSSET	Chimie propédeutique
	FEUVRAIS	Physique Electricité
	PICARD Claude	Mathématiques
	SCHMITT	Physique M. P. C.
	LAURENT	Chimie organique
	ROT	Mathématiques
	BETHOUX	Mathématiques
Mle	CALAIS	Mathématiques
	GUSAKOW	Physique
Mle	THOMAS	Chimie minérale

Maître de Conférences Adjoint

M. PIERRON

Chimie

Conseiller Administratif

M. BURNET

Secrétaire Principal Honoraire

M. ROUX

Rien n'est simple ni singulier

(P. Eluard)

AVANT - PROPOS

Je remercie Monsieur le Professeur Sarazin, Directeur du Centre d'Etudes Nucléaires de Lyon, centre dans lequel ce travail a été fait.

Que Monsieur le Professeur Braconnier, Doyen de la Faculté des Sciences de Lyon, qui a bien voulu rédiger une remarque généralisant la partie mathématique trouve ici l'expression de ma sincère reconnaissance.

Je ne saurais trop louer la largeur de vue dont a toujours fait preuve Monsieur le Professeur Philbert à mon égard. Son enseignement et les discussions utiles que nous avons eues ont beaucoup apporté à la partie physique.

Enfin j'exprime ma profonde gratitude à Monsieur Maury, Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Lyon, sous la direction duquel la partie mathématique a été mise au point.

Je remercie aussi mes camarades du groupe des hautes énergies et notamment Madame Joos qui a tapé toutes les versions de cette thèse.

CHAPITRE 0

INTRODUCTION

L'idée d'introduire une métrique indéfinie dans l'espace des états de la théorie quantique des champs est due à Gupta et Beuler¹⁾. Ils résolurent ainsi des problèmes restés en suspens (photons longitudinaux, photons du genre temps. . . .) d'électrodynamique quantique. Plus récemment, Heisenberg montra que le modèle de Lee ne pouvait être traité de façon cohérente qu'à l'aide d'une métrique indéfinie ; ce fait lui paraissait justifier l'emploi systématique d'une telle métrique dans sa théorie unitaire²⁾. Actuellement le problème suivant paraît donc se poser : " la théorie quantique des champs ne doit-elle pas se faire à l'aide d'une métrique indéfinie ? ".

Faisons une première remarque : nous avons admis que l'espace des états est espace vectoriel, c'est à dire que le principe de superposition est essentiellement valable. En mécanique quantique ce principe est parfaitement clair. En effet, les fonctions d'onde sont des vecteurs propres d'opérateurs hermitiques de L^2 , espace des fonctions de carré sommable. Toute combinaison linéaire des vecteurs propres de ces opérateurs sera encore vecteur propre. Pourtant la signification physique de ce principe est loin d'être simple. En théorie quantique des champs, seules certaines équations que doivent vérifier les opérateurs agissant sur l'espace des états sont connues. L'existence d'un espace des états est posée à priori et on y admet le principe de superposition. La seule condition qui lui soit imposée est d'être une représentation unitaire

du groupe de Lorentz, ceci pour rendre compte des phénomènes se produisant dans l'espace de Minkowski (à métrique indéfinie). Or d'après la relativité générale, l'espace de Minkowski n'est que la limite de l'espace physique lorsque les interactions de gravitation et électromagnétiques sont nulles. Peut-être une théorie quantique des champs correcte devra-t-elle utiliser pour espace des états une variété analytique modelée sur l'actuel espace des états. Nous n'envisagerons pas ici de telles conditions, nous utiliserons exclusivement des espaces vectoriels.

Notre but est d'examiner le schéma suivant : les champs libres sont décrits comme d'habitude en métrique définie positive, lorsqu'ils sont en interaction la métrique est indéfinie, ensuite on a de nouveau à faire à des champs libres. Ce schéma n'est malheureusement pas à l'abri des objections. La principale est que la théorie des champs ne nous dit pas quand a lieu l'interaction. Nous ferons néanmoins les calculs d'interaction à l'aide d'une métrique indéfinie. Dans l'état actuel de nos connaissances on emploiera la théorie des perturbations. Dans cette théorie, les approximations du deuxième ordre et d'ordres plus élevés se présentent comme des intégrales fonctionnelles, les noyaux de celles-ci étant constitués par les valeurs moyennes sur l'état de vide de commutateurs d'opérateurs de champs. Nous montrerons que ces valeurs moyennes peuvent être modifiées suivant la métrique employée ; elles sont soit des distributions concentrées sur le cône de lumière, soit des fonctions analytiques dans le cône du futur de l'espace - temps. Ce sera l'objet du chapitre II . Dans le chapitre I, nous définirons avec soin ce qu'est un espace de Hilbert de dimension infinie à métrique indéfinie, ce qui n'a pas été fait de manière systématique . Nous y rappellerons la définition des représentations unitaires du groupe de Lorentz mais nous n'étudierons pas la possibilité de faire des représentations unitaires à l'aide de tels espaces. Enfin dans le chapitre III nous discuterons une hypothèse du chapitre II et nous concluerons.

CHAPITRE I

ESPACES DE HILBERT A METRIQUE INDEFINIE

1. Définitions

Soit H un espace de Hilbert séparable complexe, ou ce qui revient au même, ayant une base orthonormale $\{\varphi_k\}$ dénombrable³⁾. La structure topologique de H est définie par un produit scalaire obéissant aux règles suivantes:

$$1^\circ \quad \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \overline{\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle} \quad \forall \psi_1, \psi_2 \in H$$

$$2^\circ \quad \langle \psi_1 | \alpha \psi_2 + \beta \psi_3 \rangle = \alpha \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle + \beta \langle \psi_1 | \psi_3 \rangle$$

$$3^\circ \quad \langle \psi | \psi \rangle \geq 0 \quad \forall \psi \in H$$

$$4^\circ \quad \langle \psi | \psi \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = 0 \text{ élément neutre de l'addition}$$

On démontre qu'à un isomorphisme près un tel espace est unique.

Si :

$$\psi_1 = \sum_k a_k \varphi_k$$

$$\psi_2 = \sum_k b_k \varphi_k$$

avec

$$\sum |a_k|^2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum |b_k|^2 < \infty$$

On a :

$$(1) \quad \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \sum_k \bar{a}_k b_k$$

Si, sur H on définit un second produit scalaire par :

$$(2) \quad \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_I = \sum_k N_k \bar{a}_k b_k \quad \text{où} \quad N_k = 1 \text{ ou } -1$$

on dira que H est muni d'une métrique indéfinie .

Nous désignerons ce second produit scalaire par " I-produit scalaire " . Il est évident que le I-produit scalaire a encore les propriétés 1° et 2°. Naturellement, il n'a plus les propriétés 3° et 4°. Il est partout défini sur H car :

$$\psi_1 \in H \implies \sum_k |a_k|^2 < \infty$$

$$\psi_2 \in H \implies \sum_k |b_k|^2 < \infty$$

$$\sum_k (|a_k| - |b_k|)^2 \geq 0 \implies \sum_k |a_k|^2 + \sum_k |b_k|^2 - 2 \sum_k |a_k| |b_k| \geq 0$$

$$\sum_k |a_k b_k| \leq \sum_k |a_k|^2 + \sum_k |b_k|^2 < \infty$$

et

$$|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_I| = \left| \sum_k a_k b_k N_k \right| \leq \sum_k |a_k b_k| < \infty$$

Montrons l'existence d'un opérateur η de H tel que :

$$(3) \quad \langle \psi_1 | \eta | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_I \quad \forall \quad \psi_1, \psi_2 \in H$$

En particulier pour les vecteurs de base φ_i, φ_j on doit avoir :

$$\langle \varphi_i | \eta | \varphi_j \rangle = \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle_I$$

d'où:

$$\eta_{ij} = N_i \delta_{ij} \quad \text{si} \quad \eta \varphi_j = \sum_i \eta_{ij} \varphi_i$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Si on définit η par :

$$\eta \psi_2 = \eta \sum_j b_j \varphi_j = \sum_j b_j (\eta \varphi_j)$$

avec:

$$\begin{aligned} \eta \varphi_j &= \sum_i \eta_{ij} \varphi_i \\ &= N_j \varphi_j \end{aligned}$$

soit:

$$n \psi_2 = \sum_j b_j N_j \varphi_j$$

On voit en utilisant (1) et (2) que η vérifie l'équation (3) et il est le seul comme on le voit d'après son action sur les vecteurs de base.

Nous allons montrer maintenant que η est un opérateur. Il est linéaire montrons qu'il est continu et isométrique.

Soit $\psi \in H$

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_k a_k \varphi_k \\ ||\psi|| &= \langle \psi | \psi \rangle^{1/2} = \left(\sum_k |a_k|^2 \right)^{1/2} \\ ||\eta \psi|| &= \langle \eta \psi | \eta \psi \rangle^{1/2} = \left(\sum_k \overline{(a_k N_k)} (a_k N_k) \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_k a_k \overline{a_k} N_k N_k \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_k \overline{a_k} a_k \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$||\psi|| = ||\eta \psi|| \quad \text{C. Q. F. D.}$$

η étant un opérateur de H il possède un adjoint η^* et l'isométrie se traduit par :

$$(4) \quad \eta^* \eta = I \quad \text{I étant l'identité}$$

η vérifie une autre relation :

$$(5) \quad \eta^2 = I$$

En effet :

$$\eta^2 \psi = \eta(\eta \psi) = \eta \sum_k a_k N_k \varphi_k = \sum_k a_k N_k^2 \varphi_k = \psi$$

Si on multiplie (4) par η à droite, en tenant compte de (5) on obtient

$$\eta^* = \eta$$

η est donc self-adjoint

η sera appelé l'opérateur métrique

Nous allons envisager les deux sous-espaces de H $\text{Ker}(\eta)$ et $\text{Im}(\eta)$

$$- \quad \psi \in \text{Ker}(\eta) \Rightarrow \eta \psi = \sum a_k N_k \varphi_k = 0 \Rightarrow a_k N_k = 0 \quad \forall k$$

car H est séparable. D'où :

$$\text{Ker}(\eta) = \{0\}$$

$$- \quad \forall \psi_1 \in \text{Im}(\eta) \exists \psi_2 \in H \text{ tel que}$$

$$\psi_1 = \eta \psi_2$$

$$\eta \psi_1 = \eta^2 \psi_2 = \psi_2 \quad \text{d'après (5)}$$

$\forall \psi_1 \in H$ on peut calculer ψ_2 tel que $\psi_1 = \eta \psi_2$, d'où :

$$\text{Im}(\eta) = H$$

η possède un inverse $\eta^{-1} = \eta$ c'est un homéomorphisme

Corollaire : Continuité du I-produit scalaire

$$\langle x_n | y \rangle_I \rightarrow \langle x | y \rangle_I \quad \text{si } x_n \rightarrow x \quad \forall y$$

En effet :

$$\langle x_n | y \rangle_I = \langle x_n | \eta y \rangle \rightarrow \langle x | \eta y \rangle = \langle x | y \rangle_I$$

2. Opérateurs

Dans l'espace de Hilbert H les opérateurs ont des adjoints par rapport au produit scalaire habituel. Soit P un opérateur de H , P^* son adjoint, on aura:

$$\langle P \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | P^* \psi_2 \rangle$$

On sait que P^* est aussi un opérateur de H .

Peut-on faire la même opération par rapport au I-produit scalaire ?

Soit P^Q le I-adjoint de P , s'il existe, il doit vérifier :

$$(6) \quad \langle P \psi_1 | \psi_2 \rangle_I = \langle \psi_1 | P^Q \psi_2 \rangle_I$$

c'est à dire :

$$\langle P \psi_1 | \eta \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \eta P^\oplus \psi_2 \rangle$$

et

$$\langle P \psi_1 | \eta \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | P^\oplus \eta \psi_2 \rangle$$

d'où

$$(7) \quad \begin{aligned} \eta P^\oplus &= P^* \eta \\ P^\oplus &= \eta P^* \eta \end{aligned}$$

$P^\oplus$ défini par (7) est bien un opérateur, car produit d'opérateurs, et il est immédiat de voir qu'il vérifie (6).

Le I-adjoint a naturellement les mêmes propriétés que l'adjoint :

$$\begin{aligned} - \quad (P^\oplus)^\oplus &= \eta (\eta P^* \eta)^* \eta \\ &= \eta \eta^* P \eta \eta = \eta^2 P \eta^2 = P \\ - \quad (PQ)^\oplus &= \eta (PQ)^* \eta = \eta Q^* \eta \eta P^* \eta = Q^\oplus P^\oplus \end{aligned}$$

On appellera self-adjoint un opérateur P tel que :

$$P^\oplus = P$$

On sait que par rapport au premier produit scalaire les opérateurs self-adjoints ont des valeurs propres réelles et des vecteurs propres mutuellement orthogonaux. Pour les opérateurs self-I-adjoints on a ⁴⁾ trois théorèmes (nous nous servirons seulement du troisième dans la suite), qui montrent clairement les différences qui existent entre les opérateurs self-adjoints et I-self-adjoints.

Théorème I : Un opérateur self-I-adjoint P peut avoir des valeurs propres complexes non réelles mais alors les vecteurs propres correspondants ont leur carré I-scalaire nul.

Démonstration :

Soit ψ un vecteur propre de P ayant p pour valeur propre

$$P | \psi \rangle = p | \psi \rangle$$

$$\langle \psi | P | \psi \rangle_I = p \langle \psi | \psi \rangle_I$$

$$= \langle \psi | P^\oplus | \psi \rangle_I$$

$$= \langle \psi | P | \psi \rangle_I$$

$$= \bar{p} \langle \psi | \psi \rangle_I$$

$$= \bar{p} \langle \psi | \psi \rangle_I \quad \text{car } \langle \psi | \psi \rangle_I \text{ est réel}$$

d'où :

$$(p - \bar{p}) \langle \psi | \psi \rangle_I = 0 \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème II : Si ψ_1 et ψ_2 sont deux vecteurs propres de l'opérateur self-I-adjoint P , correspondant à deux valeurs propres a et b alors si $\bar{a} \neq b$, ψ_1 et ψ_2 sont I-orthogonaux.

Démonstration :

$$P \psi_1 = a \psi_1$$

$$P \psi_2 = b \psi_2$$

$$\langle \psi_1 | P \psi_2 \rangle_I = b \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_I$$

$$= \langle \psi_2 | P | \psi_1 \rangle_I$$

$$= \bar{a} \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle_I$$

$$= \bar{a} \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_I$$

d'où :

$$(b - \bar{a}) \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_I = 0 \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème III : La condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur self-adjoint P soit I-self-adjoint est que $P\eta = \eta P$

Démonstration :

$$P = P^*$$

$$P^\oplus = \eta P^* \eta$$

$$\eta = \eta^{-1}$$

$$P = P^\oplus \iff P\eta = \eta P \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Cette dernière condition peut s'écrire :

$$[P, \eta] = 0$$

3. Espaces de Hilbert à métrique indéfinie - I-représentations unitaires du groupe de Lorentz

Nous savons qu'il existe des représentations unitaires de dimensions infinies du groupe de Lorentz $\mathcal{L}^{(5)}$. Il existe un espace de Hilbert H doué d'opérateurs T_g tel qu'il existe un homomorphisme de groupe

$$g \rightarrow T_g \quad g \in L \quad \text{et} \quad T_g \in \mathcal{L}(H)$$

$$\text{avec la condition d'unitarité } T_g T_g^* = I$$

Le problème qui se pose est de savoir s'il existe des représentations du groupe L qui soient I-unitaires, c'est à dire, une famille d'opérateurs $\{V_g\}$ sur H tel que :

$$g \rightarrow V_g \text{ soit un homomorphisme de groupe}$$

et

$$V_g V_g^\oplus = I$$

On peut démontrer le théorème suivant :

Si T_g est une famille d'opérateurs représentation unitaire de L la condition nécessaire et suffisante pour que T_g soit aussi une représentation I-unitaire est que pour tout T_g on ait $T_g \eta = \eta T_g$

En effet, on a :

$$T_g T_g^* = I$$

$$T_g \eta^2 T_g^* = I$$

$$\eta T_g \eta^2 T_g^* \eta = I$$

$$\eta T_g \eta T_g^* = I$$

La condition nécessaire et suffisante pour que :

$$T_g T_g^\oplus = I$$

est que :

$$\eta T_g \eta = T_g \quad \text{ou} \quad \eta T_g = T_g \eta$$

Ce théorème permet de choisir parmi les représentations unitaires celles qui sont aussi I-unitaires, mais malheureusement il ne nous permet d'affirmer qu'il en existe au moins une. Nous ne traiterons pas ce problème et nous admettrons que de telles représentations existent.

Par contre, les translations qui forment un sous-groupe distingué de L ont une représentation unitaire par des scalaires commutant avec n , donc ont la même représentation I-unitaire. Nous ferons la construction explicite de cette représentation au chapitre II.

4. Remarques sur l'espace des états de la théorie quantique des champs

En réalité l'espace H des états de la théorie quantique des champs est une somme continue d'espaces de Hilbert $H_p^{(6)}$. En effet un état physique est décrit par un certain nombre de variables discrètes $= \alpha$ (spin, nombre de charges étrangeté, etc. ...) et une variable continue l'énergie impulsion : p .

Pour une énergie impulsion donnée, on admet que l'espace des états est un espace de Hilbert; lorsque l'énergie impulsion varie, il faut faire une somme continue de ces espaces.

Lorsqu'on fait en physique la somme continue H d'espaces de Hilbert H_p indicés sur le dual de l'espace de Minkowski M' tout vecteur $\psi \in H$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule :

$$\psi = \left\{ \psi_p \right\} \quad p \in M' \quad \text{avec} \quad \psi_p \in H_p$$

si $|p, \alpha\rangle$ désigne une base de H_p $\psi_p = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(p) |p, \alpha\rangle$
on suppose que :

$$\int \left(\sum_{\alpha} |a_{\alpha}(p)|^2 \right) dp \quad \text{existe}$$

La mesure employée est telle qu'une masse $+1$ est concentrée en O , une autre masse $+1$ est étalée sur l'hyperboloïde $p^2 = \mu^2$ où μ est la masse du boson le plus léger et pour $p^2 > (2\mu)^2$ on prend la mesure de Lebesgue ordinaire.

On définit sur H un produit scalaire par

$$\langle \psi' | \psi \rangle = \int \langle \psi'_p | \psi_p \rangle_{H_p} dp = \int \left(\sum_{\alpha} \bar{a}'_{\alpha}(p) a_{\alpha}(p) \right) dp$$

On montre que ce produit scalaire définit sur H une norme qui en fait un espace de Hilbert séparable.

On pourra définir dans H d'autres produits scalaires en munissant chacun des H_p d'un $\mathbb{R}$ -produit scalaire. Pour cela nous définissons l'opérateur η_p dans H par

$$\begin{aligned} \psi &= \left\{ \psi_p \right\} \\ \psi_p &= \sum_{\alpha} a_{\alpha}(p) |p, \alpha\rangle \\ \eta \psi &= \eta \psi_p \end{aligned}$$

en notant aussi pour simplifier η la restriction à H_p de l'opérateur η

$$\eta \psi = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(p) N_{\alpha}(p) |p, \alpha\rangle$$

Nous avons déjà montré que dans chaque H_p , η était un opérateur isométrique

On établit $||\eta \psi|| = ||\psi||$ ce qui montre que η est un opérateur isométrique dans H.

On vérifie sans peine que : $\forall \psi_1$ et $\psi_2 \in H$

$$\langle \eta \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \eta \psi_2 \rangle \quad \text{donc}$$

que $\eta = \eta^*$, que $\eta^2 = I$

Appelons encore I-produit scalaire de ψ' et ψ appartenant à H, noté encore $\langle \psi' | \psi \rangle_I$ la quantité

$$\langle \psi' | \psi \rangle_I = \int \Sigma \bar{a}'_\alpha(p) a_\alpha(p) N_\alpha(p) dp = \langle \psi' | \eta \psi \rangle$$

Ce n'est peut-être pas un I-produit scalaire au sens défini précédemment car nous n'avons pas exhibé une base de H (voir appendice). Mais les raisonnements utilisés aux pages 7, 8 et 9 de ce mémoire peuvent se refaire sans modification : en particulier le I-adjoint $P^\oplus$ existe et vaut $P^\oplus = \eta P \eta$.

Appendice

M. le Professeur Braconnier m'a fait part des remarques suivantes :

1. Soit H un espace hilbertien.

1.1 Si U est un opérateur (continu) hermitien de H et si l'on pose

$F_U(\psi, \psi') = \langle U \cdot \psi | \psi' \rangle$ pour ψ et ψ' dans H, F_U est une forme (continue) hermitienne dans $H \times H$. Il est immédiat que $U \rightarrow F_U$ est un isomorphisme de l'espace de Banach (réel) des opérateurs hermitiens de H sur celui des formes hermitiennes dans $H \times H$.

1.2. Soit J une involution hermitienne de H ; J est unitaire. Alors $P = \frac{1}{2}(1_H + J)$ et $Q = \frac{1}{2}(1_H - J)$ sont des projecteurs orthogonaux de H, tels que $J = P - Q$ et $1_H = P + Q$. Soit $H^+ = P(H)$ et $H^- = Q(H)$; H^+ (resp. H^-) est l'ensemble des $\psi \in H$ tels que $J \cdot \psi = \psi$ (resp. $J \cdot \psi = -\psi$). H est somme directe orthogonale de H^+ et de H^- . La forme hermitienne F_J n'est pas dégénérée.

Soit $(\psi_j)_{j \in J^+}$ (resp. $(\psi_j)_{j \in J^-}$) une base hilbertienne de H^+ (resp. H^-) et J la somme des ensembles J^+ et J^- ; $(\psi_j)_{j \in J}$ est une base hilbertienne de H . Si $\psi = \sum_j \xi_j \psi_j$ et $\psi' = \sum_j \eta_j \psi_j$ sont dans H , on a :

$$(1.2.1) \quad F_J(\psi, \psi') = \sum_{j \in J^+} \xi_j \bar{\eta}_j - \sum_{j \in J^-} \xi_j \bar{\eta}_j.$$

1.3 Réciproquement, si F_J est une forme hermitienne sur $H \times H$ et s'il existe une base hilbertienne $(\psi_j)_{j \in J}$ de H telle que l'on ait (1.2.1) pour tout couple ψ, ψ' d'éléments de H (J^+ et J^- partitionnant J), J est une involution de H .

2. Soit (Ω, μ) un espace mesuré et $(H_p)_{p \in \Omega}$ une famille d'espaces hilbertiens et soit H la somme continue des H_p (par rapport à une famille fondamentale). Soit $p \rightarrow J(p)$ un champ d'involutions μ -intégrable; alors, si ψ et ψ' sont dans H , $(\psi, \psi') \rightarrow \int_{\Omega} J(p) \cdot \psi(p) \mid \psi'(p) > d\mu(p)$ est une forme hermitienne sur $H \times H$. Si J est l'opérateur hermitien de H qui lui est associé, J est une involution telle que :

$$(2.1.1) \quad \langle J \cdot \psi \mid \psi' \rangle = \int_{\Omega} \langle J(p) \cdot \psi(p) \mid \psi'(p) \rangle d\mu(p)$$

si ψ et ψ' sont dans H .

3. Tout ceci relève de la théorie des espaces hermitiens et des antinoyaux, qu'il y aurait sans doute lieu d'appliquer dans ce travail; cf. par exemple : SCHWARTZ (L.) - Sous-espaces hilbertiens et antinoyaux associés (séminaire Bourbaki, 238, 1962)

ARONSZJAN (N.). Theory of reproducing kernels (Trans. Amer. Math. Soc. 68, 337-404, 1950)

SCHWARTZ (L.). - Conférences au Centro internazionale Matematico Estivo (mult. 1961).

CHAPITRE II

METRIQUE INDEFINIE ET VALEURS MOYENNES DES COMMUTATEURS DE LA THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

Précisons d'abord que nous admettrons la théorie quantique des champs telle qu'elle est présentée actuellement dans les ouvrages classiques: Schweber, Bogolioubov, Umezawa, Wentzel, etc. On sait que cette présentation est à peu près dénuée de sens (mathématique) car les règles pour obtenir les quantités physiques sont beaucoup trop arbitraires (renormalisations non covariantes). Actuellement beaucoup de théoriciens s'attachent à reformuler la théorie mais ce n'est pas un problème résolu . Aussi est-ce dans le cadre de l'ancienne théorie que nous nous placerons. Dans cette théorie, on suppose l'existence d'un espace des états physiques, chaque vecteur de cet espace étant caractérisé par son énergie impulsion et ses différents nombres quantiques (spin, étrangeté, nombre de baryons, etc. . . .) Sur cet espace agissent des opérateurs $\phi(x)$ de champs, qui, appliqués à l'état de vide ψ_0 donnent un champ en x dont l'énergie impulsion est donnée par le spectre de Fourier. Ces opérateurs de champs obéissent à des équations différentielles du type Klein-Gordon ou Dirac ou spino-tensorielles.

Nous voulons maintenant montrer le lien qui existe entre la métrique employée dans l'espace des états et la nature des fonctions représentant les valeurs moyennes des commutateurs des opérateurs de champs en théorie des champs. Pour cela, par souci d'unité et de clarté nous allons d'abord rappeler la " théorie spectrale " de Lehmann (Schweber Ch. 17 a) qui est faite à l'aide

d'une métrique définie positive. Ensuite nous discuterons des différentes possibilités qui s'offrent avec une métrique indéfinie. Dans chaque cas, nous établirons des relations que doivent vérifier les quantités $N_\alpha(p)$ définies dans le premier chapitre. En raison de leur similitude plus grande, tous les calculs seront faits dans le cas de deux bosons scalaires neutres. Pour des fermions, mises à part des modifications de détails, les calculs et les résultats sont analogues.

Nous rappelons les notations employées :

x	appartient à l'espace de Minkowski M , c'est la variable de position
p	appartient à l'espace de Minkowski dual du précédent M' , c'est la variable d'énergie. $xp = px$ est un scalaire. Les composantes de p sont p^μ ou p_μ , μ variant de 1 à 4
p^2	$= (p^0)^2 - (\vec{p})^2$
$ \psi^0\rangle$	état de vide
$\phi(x)$	opérateur de champ en x
δ	distribution de Dirac
θ	distribution de Heaviside

1. Représentation spectrale de Lehmann

Les hypothèses suivantes :

- a) invariance relativiste
- b) conditions spectrales (existence d'un unique état de vide et d'états avec $p_\mu p^\mu \geq 0, p_0 \geq 0$)
- c) les états physiques sous-tendent un espace de Hilbert

nous permettent d'obtenir des propriétés générales des valeurs moyennes des commutateurs de la théorie quantique des champs.

Nous voulons calculer la quantité :

$$\langle \psi_0 | [\phi(x), \phi(y)] | \psi_0 \rangle$$

où Ψ_0 est le vecteur d'état de vide, $\phi(x)$ l'opérateur de champs en x point de l'espace-temps de Minkowski.

Nous commencerons par la quantité:

$$\langle \Psi_0 | \phi(x) \phi(y) | \Psi_0 \rangle$$

La condition c) nous permet d'affirmer qu'il existe dans chaque H_p un système complet de vecteurs $|p, \alpha\rangle$ où p (énergie impulsion) définit l'espace H_p et où α caractérise l'ensemble des autres variables (charges, étrangeté, etc...) qui forment un spectre discret.

$$\langle \Psi_0 | \phi(x) \phi(y) | \Psi_0 \rangle = \langle \phi(x) \Psi_0 | \phi(y) \Psi_0 \rangle$$

car $\phi(x)$ est self-adjoint dans H .

D'après la définition du produit scalaire dans H on a :

$$(1) \quad \langle \phi(x) \Psi_0 | \phi(y) \Psi_0 \rangle = \int dp \sum_{\alpha} \langle \phi(x) \Psi_0 | p, \alpha \rangle_{H_p} \langle p, \alpha | \phi(y) \Psi_0 \rangle_{H_p}$$

L'indice H_p indique que le produit scalaire est formé dans H_p . Autrement dit, on évalue pour chaque p

$$\langle (\phi(x) \Psi_0)_p | p, \alpha \rangle \quad \text{et} \quad \langle p, \alpha | (\phi(y) \Psi_0)_p \rangle$$

D'autre part

$$(2) \quad \langle (\phi(x) \Psi_0)_p | p, \alpha \rangle = \langle (\phi(0) \Psi_0)_p | p, \alpha \rangle e^{-ipx}$$

En effet, en vertu de la condition a) l'espace de Hilbert utilisé doit être une représentation unitaire du groupe de Lorentz, or les translations forment un sous-groupe abélien et connexe de ce groupe, la seule représentation possible de ce sous-groupe est donc unidimensionnelle et les générateurs infinitésimaux de ce sous-groupe sont :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} |p, \alpha\rangle = ip_1 |p, \alpha\rangle, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} |p, \alpha\rangle = ip_2 |p, \alpha\rangle, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} |p, \alpha\rangle = ip_3 |p, \alpha\rangle,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_4} |p, \alpha\rangle = -iE |p, \alpha\rangle$$

A l'aide de théorèmes bien connus sur les groupes de Lie, on obtient une représentation en exponentiant ces opérateurs infinitésimaux. On aura un homomorphisme entre la translation de vecteur x de l'espace de Minkowski et l'opérateur U_x unitaire agissant sur l'espace de Hilbert, vérifiant les conditions :

$$(3) \quad \begin{cases} U_x |p, \alpha\rangle = e^{-ipx} |p, \alpha\rangle \\ U_{-x}^{-1} = U_{-x}^* = U_x \\ \phi(x) = U_{-x} \phi(0) U_x \end{cases}$$

Si on ajoute la condition

$$U_x \psi_0 = \psi_0 \quad \forall x \in M$$

qui correspond à $p=0$ et qui exprime la stabilité de l'état de vide par rapport à la translation. (3) entraîne (2). En effet, les produits scalaires étant pris dans H_p

$$\begin{aligned} \langle \phi(x) \psi_0 | p, \alpha \rangle &= \langle U_{-x} \phi(0) U_x \psi_0 | p, \alpha \rangle \\ &= \langle U_{-x} \phi(0) \psi_0 | p, \alpha \rangle \\ &= \langle \phi(0) \psi_0 | U_{-x}^* | p, \alpha \rangle \\ &= \langle \phi(0) \psi_0 | U_{+x} | p, \alpha \rangle \\ &= \langle \phi(0) \psi_0 | p, \alpha \rangle e^{-ipx} \end{aligned}$$

Avec les mêmes conditions on montre que :

$$(4) \quad \langle p, \alpha | \phi(y) \psi_0 \rangle = \langle p, \alpha | \phi(0) \psi_0 \rangle e^{ipy}$$

(2) et (4) reportés dans (1) donnent :

$$\begin{aligned} \langle \psi_0 | \phi(x) \phi(y) | \psi_0 \rangle &= \int dp \sum_{\alpha} \langle \phi(0) \psi_0 | p, \alpha \rangle \langle p, \alpha | \phi(0) \psi_0 \rangle e^{-ip(x-y)} \\ &= \int dp \sum_{\alpha} | \langle p, \alpha | \phi(0) \psi_0 \rangle |^2 e^{-ip(x-y)} \end{aligned}$$

Introduisons (6) $\rho(p) = \sum_{\alpha} | \langle p, \alpha | \phi(0) \psi_0 \rangle |^2 \cdot (2\pi)^3$

La sommation s'étendant à tous les états à énergie-impulsion fixée d'après les lois de supersélection, ce nombre ne peut être infini. Il augmente avec p^0 mais pour un p^0 fixé, la sommation est finie et la quantité $\rho(p)$ est bien déterminée.

D'autre part l'invariance relativiste permet d'écrire :

$$\langle p, \alpha | \phi(0) \psi_0 \rangle = \langle \Lambda p, \alpha | \phi(0) \psi_0 \rangle$$

où Λ est une transformation de Lorentz. Il en résulte :

$$\rho(p) = \rho(\Lambda p)$$

ρ est donc un invariant de Lorentz, ρ peut donc s'exprimer à l'aide des invariants du groupe de Lorentz. Les deux invariants du groupe de Lorentz sont $p^2 = m^2$ et le moment angulaire total du système. Ici la sommation sur tous les nombres quantiques α nous permet d'affirmer que ρ est une fonction de p^2 seulement.

En tenant compte de la condition b) on obtient à la place de (6)

$$(7) \quad \theta(p^2) \theta(p_0) \rho(p^2) = \sum_{\alpha} | \langle \phi(0) \psi_0 | p, \alpha \rangle |^2 \cdot (2\pi)^3$$

où θ est la distribution de Heaviside.

(7) reporté dans (5) donne :

$$\langle \psi_0 | \phi(x) \phi(y) | \psi_0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \theta(p^2) \theta(p_0) \rho(p^2) e^{-ip(x-y)}$$

en remplaçant dp par d^4p .

On peut écrire:

$$\theta(p^2) = \int_{-\infty}^{\infty} dm^2 \delta(p^2 - m^2) \theta(m^2) = \int_0^{\infty} \delta(p^2 - m^2) dm^2$$

$$\langle \psi_0 | \phi(x) \phi(y) | \psi_0 \rangle = i \int_0^{\infty} dm^2 \rho(m^2) x \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4p \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) e^{-ip(x-y)}$$

La seconde intégrale est égale à la distribution bien connue :

$$\Delta^+(x-y, m^2)$$

D'où:

$$\langle \psi_0 | [\phi(x), \phi(y)] | \psi_0 \rangle = i \int dm^2 \rho(m^2) \Delta^+(x-y, m^2)$$

avec:

$$\Delta^+(x-y, m^2) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d^4 p \theta(p_0) \delta(m^2 - p^2) e^{-ip(x-y)}$$

En procédant de la même manière et en s'appuyant sur la relation

$$\Delta^+(-x) = -\Delta^-(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4 p \alpha(-p_0) \delta(m^2 - p^2) e^{-ipx}$$

et, compte tenu de

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \Delta^+(x) + \Delta^-(x) \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4 p \delta(m^2 - p^2) e^{-ipx} \end{aligned}$$

On obtient finalement:

$$(8) \quad \langle \psi_0 | [\phi(x), \phi(y)] | \psi_0 \rangle = i \int_0^\infty dm^2 \rho(m^2) \Delta(x-y, m^2)$$

qui est la décomposition spectrale de Lehmann

2. Introduction d'une métrique indéfinie

Nous nous proposons d'effectuer les mêmes calculs pour obtenir les quantités :

$$\langle \psi_0 | [\phi(x), \phi(y)] | \psi_0 \rangle_I$$

Comme en (3)

$$U_x |p, \alpha\rangle = e^{-ipx} |p, \alpha\rangle$$

$$U_x^* |p, \alpha\rangle = e^{ipx} |p, \alpha\rangle$$

$|p, \alpha\rangle$ étant un vecteur de base

$$\eta |p, \alpha\rangle = N_\alpha(p^2) |p, \alpha\rangle$$

et on prend N_α fonction de p^2 seulement pour que ce soit un invariant de Lorentz

$$\begin{aligned} U_x^\oplus |p, \alpha\rangle &= \eta U_x^* \eta |p, \alpha\rangle = e^{ipx} N_\alpha^2(p^2) |p, \alpha\rangle \\ &= e^{ipx} |p, \alpha\rangle \end{aligned}$$

d'où:

$$U_x U_x^\oplus |p, \alpha\rangle = U_x^\oplus U_x |p, \alpha\rangle = |p, \alpha\rangle$$

Le sous-groupe des translations est donc représenté de manière I-unitaire par sa représentation unitaire.

Nous supposons maintenant que $\phi(x)$ commute avec l'opérateur η . Ceci aura pour conséquence $\phi(x)$ étant self-adjoint, de rendre $\phi(x)$ I-self adjoint d'après le théorème III du Chapitre I. Ceci est nécessaire pour pouvoir effectuer la décomposition de Lehmann. En effet, on ne pourra écrire

$$\langle \psi_0 | \phi(x), \phi(y) | \psi_0 \rangle_I = \langle \phi(x) \psi_0 | \phi(y) \psi_0 \rangle_I$$

qu'en faisant l'hypothèse précédente.

Ensuite les calculs se font comme dans le 1°. Dans la formule (5), on remplace le produit scalaire par un I-produit scalaire qui donne :

$$\langle \phi(x) \psi_0 | \phi(y) \psi_0 \rangle_I = \int d^4 p \sum_\alpha N_\alpha(p^2) |\langle p, \alpha | \phi(0) \psi_0 \rangle|^2 e^{-ip(x-y)}$$

(6) est remplacé par

$$(9) \quad \rho'(p^2) = (2\pi)^3 \sum_\alpha |\langle \phi(0) \psi_0 | p, \alpha \rangle|^2 N_\alpha(p^2)$$

(8) est remplacé par

$$(10) \quad \langle \psi_0 | [\phi(x), \phi(y)] | \psi_0 \rangle_I = i \int dm^2 \rho'(m^2) \Delta(x-y, m^2)$$

La différence essentielle avec le cas de la métrique positive est que maintenant $\rho'(m^2)$ n'est plus une quantité toujours positive. C'est ce fait que nous allons tâcher d'exploiter.

Nous rappelons que le calcul donne :

$$(11) \quad \Delta(x-y, m^2) = \frac{1}{2\pi} \epsilon(x_0 - y_0) \left[\delta((x-y)^2) - \frac{m^2}{2} \theta((x-y)^2) \frac{J_1(m\sqrt{(x-y)^2})}{m\sqrt{(x-y)^2}} \right]$$

(J_1 étant la fonction de Bessel de première espèce), ce qui, près du cône de lumière $(x-y)^2 \cong 0$ donne

$$(12) \quad \Delta(x-y, m^2) = \frac{1}{2\pi} \epsilon(x_0 - y_0) \left[\delta(x-y)^2 - \frac{m^2}{2} \theta((x-y)^2) \right]$$

c'est à dire que Δ a une partie régulière analytique dans le cône du futur de l'espace de Minkowski et une partie singulière au voisinage du cône de lumière. En théorie classique il n'y avait aucun moyen d'éliminer dans la valeur moyenne des commutateurs l'une quelconque de ces deux parties. Avec une métrique indéfinie en jouant sur le fait que ρ' n'est plus toujours positif, nous allons pouvoir éliminer tout ou partie du comportement analytique ou du comportement singulier.

En comparant (9) (10) et (11) on voit que la condition :

$$A : \int \sum_{\alpha} |\langle \phi(0) \psi_0 | p; p^2 = m^2, \alpha \rangle|^2 N_{\alpha}(m^2) dm^2 = 0$$

permet d'éliminer la partie singulière de la valeur moyenne du commutateur. Malheureusement la condition A ne nous permet pas de déterminer les N_{α} ce qui nous donnerait la structure de chaque secteur à m^2 fixé. Mais néanmoins c'est une condition nécessaire et suffisante que doivent vérifier les N_{α} pour que les distributions δ soient éliminées.

Si l'on veut éliminer la partie régulière de $\langle \psi_0 | [\phi(x), \phi(y)] | \psi_0 \rangle_I$ au voisinage du cône de lumière il suffit de poser :

$$B: \int \sum_{\alpha} |\langle \phi(0) \psi_0 p, \alpha ; p^2 = m^2 \rangle|^2 N_{\alpha}(m^2) m^2 dm^2 = 0$$

Ainsi si B est réalisée sur le cône de lumière, la valeur moyenne du commutateur se comportera franchement comme une distribution $\delta(x-y)^2$.

Le cas où A et B sont réalisés simultanément correspond au cas où la valeur moyenne s'annule sur et au voisinage du cône de lumière. Il semble que ce cas n'ait pas d'intérêt physique, car les phénomènes physiques se déroulent sur ce cône.

Enfin se présente un dernier cas : celui où l'on veut éliminer complètement mais progressivement la partie en J_1 .

$$C: \int_0^{\infty} \sum_{\alpha} |\langle \phi(0) \psi_0 p, \alpha ; p = m^2 \rangle|^2 N_{\alpha}(m^2) m^{2q} dm^2 = 0$$

avec $q = 1, 2, \dots$

q prenant des valeurs entières de un à l'infini. Alors seule la partie en δ reste. Remarquons que si l'on avait voulu éliminer brutalement la partie analytique, on aurait posé la condition

$$D: \int_0^{\infty} \sum_{\alpha} |\langle \phi(0) \psi_0 p, \alpha ; p = m^2 \rangle|^2 N(m^2) m J_1(x m) dm^2 = 0$$

Nous voyons que D dépend de x c'est à dire de $\sqrt{(x-y)^2}$. Cette condition n'est pas maniable et elle a de fortes chances de n'être réalisée que dans le cas $m=0$, cas de l'électrodynamique.

En résumé :

A $\Rightarrow$ valeur moyenne analytique dans tout l'espace de Minkowski

B $\Rightarrow$ valeur moyenne uniquement singulière sur le cône de lumière, analytique ailleurs.

C $\Rightarrow$ valeur moyenne uniquement singulière sur le cône de lumière, nulle ailleurs.

CONCLUSION

Dans le calcul de la représentation de Lehmann en métrique indéfinie nous avons fait l'hypothèse suivante : les opérateurs de champ commutent avec l'opérateur métrique. En théorie quantique des champs, on suppose que tout état peut se représenter comme $\phi(x) | \psi_0 \rangle$ c'est à dire l'action d'un opérateur de champ sur l'état de vide. Si de plus on admet que H_0 , l'espace de Hilbert décrivant l'état de vide a pour dimension un, on est amené à une contradiction. En effet :

$$\eta \phi(x) | \psi_0 \rangle = \phi(x) \eta | \psi_0 \rangle = N_0(0) \phi(x) | \psi_0 \rangle$$

aurait pour conséquence :

$$N_\alpha(p^2) \equiv N_0(0)$$

Pour résoudre cette contradiction on peut supposer que le vide est dégénéré, c'est à dire que H_0 a assez de dimension pour qu'on puisse choisir les $N_\alpha(p^2)$ avec assez de liberté.

Une autre façon consiste à abandonner l'hypothèse que tout état est de la forme $\phi(x) | \psi_0 \rangle$, c'est à dire que ψ_0 est cyclique dans H . Mais dans les conditions actuelles on ne voit pas comment remplacer cette hypothèse.

D'autre part nous n'avons eu besoin pour les calculs que de représentation I-unitaire du sous-groupe de translation du groupe de Lorentz. Il se pose la question suivante : peut-on faire des représentations I-unitaires du groupe de Lorentz complet ou du groupe homogène orthochrone ? Il serait intéressant, du point de vue mathématique, de répondre à cette question.

En dimension finie, la réponse est négative pour les représentations unitaires. Pour obtenir des représentations unitaires infinies du groupe homogène Naimark ⁵⁾ est obligé de poser des conditions très strictes sur le produit scalaire, au contraire pour les représentations l-unitaires le choix est plus grand. Il semble que, dans ce cas, la réponse soit positive.

Pour conclure, considérons d'abord une théorie peu propre du point de vue mathématique : la théorie des perturbations. Nous savons que dans cette théorie la matrice S (qui lors d'une diffusion fait passer de l'état initial à un état final : $| \text{final} \rangle = S | \text{initial} \rangle$) peut être développée en série. Le premier terme donne la matrice S en l'absence d'interaction, c'est à dire l'unité. Les termes suivants sont de la forme :

$$G^2 \int k(x_1 - x_2) \phi(x_1) dx_1$$

où k , noyau de l'intégrale est appelé le propagateur car au second ordre il fait passer de l'opérateur de champ ϕ en x_1 à l'opérateur de champ en x_2 . G est un scalaire représentant l'intensité du couplage entre les champs considérés. Les autres termes du développement sont de la forme :

$$G^n \int \dots \int \int^k k_1(x_1 - x_2) k_2(x_2 - x_3) \dots k_n(x_n - x_{n-1}) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Or le calcul explicite, à l'aide du théorème de Wick, montre que ces propagateurs sont des sommes de valeurs moyennes sur le vide de commutateurs d'opérateurs de champs. Ainsi l'introduction d'une métrique indéfinie dans l'espace des états permet de modifier la forme de ces propagateurs. Il est évident qu'il serait intéressant d'explorer l'influence d'une modification de la forme des propagateurs sur le comportement de la série dont on sait qu'elle est divergente en général.

Nous rappellerons également le travail de Wightmann. Il a montré que toute la théorie quantique des champs est équivalente à la donnée des fonctions

de Wightmann : $\langle \psi_0 | \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | \psi_0 \rangle$, valeurs moyennes de vide des produits quelconques des opérateurs de champs. Par l'emploi d'une métrique indéfinie certaines de ces expressions peuvent être modifiées à volonté. Le calcul général de ces expressions est laborieux mais il doit donner des résultats analogues à ceux obtenus pour :

$$\langle \psi_0 | [\phi(x_1), \phi(x_2)] | \psi_0 \rangle$$

Il nous donnerait des conditions permettant de mieux connaître les N_α .

BIBLIOGRAPHIE

1. BLEULER K. Helv. Phys. Acta 25 - 567 (1950)
GUPTA S. N. Proc. Phys. Soc. (London) A 63-681 (1950)
2. HEISENBERG W. Einführung in die Theorie der Elementarteilchen (1962)
3. BERBERIAN S. K. Introduction to Hilbert space (1961)
4. PANDIT L. K. Nuovo Cimento Suppl. 11 (1959)
5. NAIMARK M. A. Les représentations linéaires du groupe de Lorentz
6. NAIMARK et FOMIN American Math. Society translations
Serie 2 Vol. 5 (1957)

TABLE DES MATIERES

Chapitre 0	Introduction
Chapitre 1	<u>Espace de Hilbert à métrique indéfinie</u> 1. Définition 2. Opérateurs 3. Espaces de Hilbert à métrique indéfinie, I-représentation unitaire du groupe de Lorentz 4. Remarque sur l'espace des états de la théorie quantique des champs Appendice
Chapitre II	<u>Métrique indéfinie et valeurs moyennes des commutateurs de la théorie quantique des champs</u> 1. Représentation spectrale de Lehmann 2. Introduction d'une métrique indéfinie
Chapitre III	Conclusion

)
Vu:

Les Membres du Jury

MM. J. BRACONNIER

G. MAURY

G. PHILBERT

Vu et approuvé :

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Jean BRACONNIER

Vu et accordé le permis d'imprimer :

Lyon, le 18 juin 1965

Le Recteur

Président du Conseil de l'Université.

P. LOUIS

